

Quattro problemi finali

Problema 1 (Unicità delle mappe di Möbius) Si dimostri che se f e g sono mappe di Möbius con

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'},$$

e $f(z) = g(z), \forall z \in \mathbb{C}^*$, esiste $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $a' = \alpha a, b' = \alpha b, c' = \alpha c, d' = \alpha d$.

[**Suggerimento:** f e g hanno stessi poli e zeri e stessi valori in 0 e ∞ (in $\mathbb{C}^*$)]

Problema 2 Si dimostri che se $f \in H(\{0 < |z - z_0| < r\})$ è iniettiva, allora z_0 non può essere una singolarità essenziale.

[**Suggerimento:** si considerino due dischi disgiunti in $D_r(z_0)$ di cui uno contenga z_0 e si usi il Teorema di Casorati-Weierstrass.]

Problema 3 (Automorfismi di $\mathbb{C}$) Si dimostri che $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{f(z) = az + b \mid a \neq 0\}$.

Problema 4 (L'indice di un punto rispetto ad una curva e generalizzazione della formula di Cauchy)

Sia γ una curva chiusa (orientata, regolare a tratti) e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, si definisce **l'indice di z_0 rispetto a γ** , il numero

$$\text{Ind}_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}.$$

Si dimostri quanto segue:

(i) $\text{Ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$.

[**Suggerimento:** sia $\zeta(t), t \in [a, b]$, una parametrizzazione di γ e sia $h(t) := \int_a^t \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t) - z_0} dt$ e si dimostri che $e^{h(t)} = (\zeta(t) - z_0)/(\zeta(a) - z_0)$.

In particolare, se γ è data da $\zeta(t) = z_0 + re^{2\pi i n t}$ con $t \in [0, 1]$, allora¹ $\text{Ind}_\gamma(z_0) = n$.

(ii) Se $\gamma \subseteq D_r(0)$, allora $\text{Ind}_\gamma(z_0) = 0$ per ogni $|z_0| \geq r$.

(iii) Si dimostri che Ind_γ è costante sulle componenti connesse individuate da² γ e vale 0 sulla componente illimitata.

[**Suggerimento:** è sufficiente dimostrare che $\text{Ind}_\gamma(z_1) = \text{Ind}_\gamma(z_2)$ per due punti z_1, z_2 tali che il segmento $[z_1, z_2] \cap \gamma = \emptyset$ e si osservi che $g(z) := (z - z_1)/(z - z_2) \notin (-\infty, 0]$ per ogni $z \notin [z_1, z_2]$.

(iv) Si dimostri che se Ω è un aperto semplicemente connesso, $\text{Ind}_\gamma(z_0) = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq \Omega$ e $z_0 \notin \Omega$.

(v) Si dimostri che se $f \in H(\Omega)$ con Ω aperto semplicemente connesso, allora, per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq \Omega$ e $z \in \Omega \setminus \gamma$, si ha

$$\text{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

¹Intuitivamente, $\text{Ind}_\gamma(z_0)$ fornisce il "numero di avvolgimenti della curva γ attorno a z_0 ".

²Il complementare di γ è un aperto unione disgiunta di aperti connessi di cui uno (ed uno solo) illimitato.